

Sorokin S.P. POSITIONAL NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS AND NUMERICAL METHOD FOR DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS IN LINEAR SYSTEM

The paper is devoted to new numerical method for discrete optimal control problems in system which is linear wrt the state variable. The method is based on the positional necessary optimality conditions in Pontryagin form. The designed method proved itself quite effective in numerical analysis of optimal control problems with bilinear dynamical systems.

Key words: optimal control; discrete linear systems with controlled coefficients; necessary optimality conditions; feedback controls; numerical method.

УДК 517.929.2

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ m -РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКОВ, МЕНЬШИХ m

© Д.Н. Спичкин

Ключевые слова: m -разностные уравнения; функции Виленкина – Крестенсона. Получена структура решения линейных m -разностных уравнений с постоянными коэффициентами порядка $q < m$ при комплексных решениях характеристического уравнения.

Обозначим через $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ упорядоченное множество неотрицательных целых чисел. Пусть $x = (x_1 \dots x_n)_m$, $p = (p_1 \dots p_n)_m$ — n -разрядные m -ичные представления этих чисел.

О п р е д е л е н и е 1. Операцией m -сдвига двух чисел $x, p \in [a, b]$, обозначаемой $x \ominus_m p$, назовем их поразрядную разность по модулю m .

О п р е д е л е н и е 2. Линейное разностное уравнение, где в качестве сдвига аргумента берется m -сдвиг, назовем *разностным уравнением с модулярной арифметикой* или *линейным m -разностным уравнением*.

Линейное m -разностное уравнение порядка q с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y(x \ominus_m q) + k_1 y(x \ominus_m (q-1)) + \dots + k_{q-1} y(x \ominus_m 1) + k_q y(x) = 0, \quad (1)$$

где $k_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, q}$.

Решениями уравнений (1) являются функции Виленкина – Крестенсона (ВКФ) [1], записываемые в форме Пэли

$$\text{Pal}(p, x) = W \sum_{j=1}^n p_{n+1-j} x_j, \quad (2)$$

где $W = e^{i \frac{2\pi}{m}}$, i — мнимая единица, x — аргумент, p — параметр, причем $x, p \in [0, m^n - 1]$. Известно [1], что при решении линейных m -разностных уравнений часть разрядов параметра p фиксируется, а часть остается произвольной.

Пусть, далее, порядок q уравнения (1) удовлетворяет неравенствам $1 \leq q < m$. Тогда число q в m -ичной n -разрядной форме представления запишется как $q = (0 \ 0 \ \dots \ q)_m$.

Подставим выражение (2) в уравнение (1) и проведем ряд упрощений. Так как выражения $(x_n - q)_m$ и $(x_n - (q-t))_m$ в модулярной арифметике, соответственно, равняются выражениям $x_n + m(\delta_0 x_n + \delta_1 x_n + \dots + \delta_{(q-1)} x_n) - q$ и $x_n + m(\delta_0 x_n + \delta_1 x_n + \dots + \delta_{(q-t-1)} x_n) -$

$-(q-t)$ (где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера) в обычной арифметике и, учтя, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
 $W^{m\alpha} = 1$, а также разделив обе части получаемого уравнения на $W^{\sum_{j=1}^{n-1} p_{n+1-j}x_j} \neq 0$, полу-
 чаем

$$W^{-p_1 q} + \sum_{t=1}^q k_t W^{-p_1(q-t)} = 0. \quad (3)$$

Пусть $\lambda \doteq W^{-p_1}$, тогда выражение (3) перепишется в виде

$$\lambda^q + \sum_{t=1}^q k_t \lambda^{q-t} = 0. \quad (4)$$

Это уравнение является характеристическим уравнением уравнения (1) в случае $1 \leq q < m$.

Решением исходного уравнения (1) будет ВКФ (2), в которой разряд p_1 параметра p фиксируется из характеристического уравнения (4) (если учесть, что $\lambda = W^{-p_1}$), а остальные разряды — произвольны.

Заметим также, что в силу равенства $|W^{-p_1}| = 1$, необходимо имеем $|\lambda| = 1$ для всех значений λ (как вещественных, так и комплексных). Поэтому справедлива

Л е м м а 1. Решения λ_r характеристического уравнения (4) для m -разностного уравнения (1) порядка $q < m$ с постоянными коэффициентами k_j , $j = \overline{1, q}$, должны удовлетворять условию $|\lambda_r| = 1$.

Для вещественных корней характеристического многочлена справедлива [2]

Т е о р е м а 1. При вещественном однократном решении λ_r характеристического уравнения (4) необходимыми условиями существования решения уравнения (1) в базисе ВКФ (2) при $q < m$ являются условия:

1. при $\lambda_r > 0$ $p_1 = 0$, параметр p имеет представление: $p = (0 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_n)$.
2. при $\lambda_r < 0$ $p_1 = \frac{m}{2}$, параметр p имеет представление: $p = (\frac{m}{2} \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_n)$, m — четное.

Обратимся к случаю простых комплексных корней характеристического многочлена.

Пусть $\lambda_r = a_r + ib_r \in \mathbb{C}$, $|\lambda_r| = 1$, является корнем уравнения (4). Тогда

$$\text{Ln} \lambda_r = i(\arg(a_r + ib_r) + 2\pi k) = -i \frac{2\pi}{m} p_1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

откуда

$$p_1 = \left(-\frac{m}{2\pi} \arg(a_r + ib_r) - mk \right) \in [0, m-1].$$

Т е о р е м а 2. Пусть уравнение (1) имеет однократное комплексное решение λ_r характеристического уравнения (4). Тогда для существования решения в базисе ВКФ необходимо, чтобы в параметре $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)_m$ разряд $p_1 = \left(-\frac{m}{2\pi} \arg(\text{Re} \lambda_r + i \text{Im} \lambda_r) - mk \right)$ и $p_1 \in [0, m-1]$, $k \in \mathbb{Z}$ (остальные разряды могут быть произвольными).

ЛИТЕРАТУРА

1. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 239 с.
2. Спичкин Д.Н. О разностных уравнениях на конечных интервалах произвольного порядка с постоянными коэффициентами // Материалы 9 студенческой научной конференции кафедры ПМИ ИжГТУ. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2007. С. 44-45.

Spichkin D.N. SOLUTION OF LINEAR m -DIFFERENCES EQUATIONS ORDER LESS THAN m

The structure of decision of order q in $q < m$ linear m -differences equations with constant coefficients for complex solutions of the characteristic equation is received.

Key words: m -differences equations; Vilenkin–Chrestenson functions.

УДК 519.254

БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СВЕРТКИ, ОСНОВАННОЕ НА ФАКТОРИЗАЦИИ ТЕНЗОРОВ

© Т.М. Спичкина

Ключевые слова: циклическая свертка; дискретные сигналы; факторизация тензоров. Приведены результаты о вычислении циклической свертки дискретных сигналов, заданных тензорами первого ранга в контравариантных координатах, разложенных в произведение тензоров другой структуры, обладающих рядом эффективных вычислительных свойств.

Основные определения

Пусть V — N -мерное линейное пространство с базисом $\langle e_i \rangle$, и пусть V^* — сопряженное линейное пространство к V с базисом $\langle e^i \rangle$. Будем рассматривать тензоры над V типа (p, q) [1], т. е. элементы пространства $(V)^{\times p} \times (V^*)^{\times q}$. Тензор типа (p, q) называется также p раз контравариантным и q раз ковариантным.

Тензору A_i^j поставим в соответствие тензор

$$B_i^j = A_{\alpha_1 i - \beta_1}^{\alpha_2 j - \beta_2}, \quad (1)$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}$, индексы $\alpha_1 i - \beta_1, \alpha_2 j - \beta_2$ при $i, j = \overline{0, N-1}$ берутся по модулю N и принимают все значения из множества $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Если коэффициенты α_k, β_k в индексах $\alpha_1 i - \beta_1, \alpha_2 j - \beta_2$ такие, что $\alpha_k, \beta_k = \overline{0, N-1}$, а $i = j = N$, то в результате получим тензор вида

$$B_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_2 \beta_2} = A_{\alpha_1 N - \beta_1}^{\alpha_2 N - \beta_2}. \quad (2)$$

Можно показать, что определение тензоров (1) и (2) — корректно [1].

Для тензора (2) определим операцию, которую назовем обобщенной операцией свертки, следующим образом:

$$B_{\beta_1}^{\beta_2} = B_{\theta \beta_1}^{\theta \beta_2} = \sum_{\theta=0}^{N-1} A_{\theta N - \beta_1}^{\theta N - \beta_2}, \text{ или, } B_{\alpha_1}^{\alpha_2} = B_{\alpha_1 \theta}^{\alpha_2 \theta} = \sum_{\theta=0}^{N-1} A_{\alpha_1 N - \theta}^{\alpha_2 N - \theta},$$

где все индексы берутся по модулю N^2 .

По аналогии с транспонированием матриц введем операцию транспонирования тензора. Тензор (1) не допускает перестановки индексов, поэтому под транспонированием тензора по смещенным координатам будем понимать описанное далее преобразование тензора.

Пусть дан тензор A_i^j . Умножим исходный тензор на метрический тензор G в ковариантных координатах, заданных в базисе $\langle e^i \rangle$, получим $A_{ij} = g_{jk} A_i^k$ и умножим результат на метрический тензор в контравариантных координатах в базисе $\langle e_i \rangle$, тогда $A_j^i = g^{ik} A_{kj}$. В дальнейшем под транспонированием по ковариантной координате i и контравариантной координате j тензора A_i^j будем понимать введенное преобразование, обозначаемое $\hat{A}_j^i = A_i^j$.

Вычисление свертки с применением тензорных операций